Impedantie-aanpassing toegepast op antennekoppelaars
Adaptation des impedances application aux coupleurs d'antennes (deel/partie 1)

Door/par ON5WF (MNS) - Vertaald door ON5UK

1. Inleiding

De aanpassing van impedanties is een materie die ons allen aanbelangt. Inderdaad, zelfs het meest elementaire radioamateurstation beschikt minstens over een ontvanger en een zender (of transceiver) en een antenne. Uiteraard wensen we dat zoveel mogelijk energie van onze zender door de antenne uitgestraald wordt en omgekeerd, dat het signaal dat onze antenne oppikt maximaal aan de ontvanger afgeleverd wordt. Dat zal enkel het geval zijn indien de juiste relatie bestaat tussen de uitgangsimpedantie van de zender en de impedantie van de antenne die de zender ziet via de voedingslijn (hetzelfde geldt in omgekeerde zin voor de ontvanger), dit wil zeggen, als de impedanties aangepast zijn.

Dit artikel (dat vooral van theoretische aard is) wil verklaren wat een aanpassing van impedanties inhoudt en hoe ze verwezenlijkt wordt. In dat verband gaat onze interesse in het bijzonder uit naar het werkingsprincipe van de antennekoppelaar.
We bestuderen hier geen praktische schema's van antennekoppelaars. Die zijn in overvloed te vinden in tijdschriften, handboeken en via het internet.

Dit eerste deel is vooral gewijd aan een opfrissing van de belangrijke begrippen impedantie en admittantie.

1. Introduction

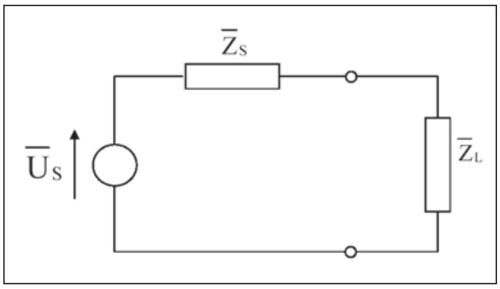
L'adaptation des impédances est un problème qui en principe nous concerne tous. En effet, la station radioamateur la plus élémentaire comprend au moins un émetteur et un récepteur (ou un transceiver) et une antenne. En général, nous souhaitons évidemment que la puissance produite par notre émetteur soit au maximum rayonnée par l'antenne et inversement, que la puissance captée par l'antenne pour un signal donné, soit transférée au maximum au récepteur. Cela ne peut se produire que si une relation bien précise est établie entre l'impédance de sortie de l'émetteur et l'impédance de l'antenne vue à travers la ligne (idem dans l'autre sens avec le récepteur), c'est-à-dire, si ces impédances sont adaptées.

L'objet de cet article (qui se veut essentiellement théorique) est d'expliquer en quoi consiste exactement cette adaptation des impédances et comment on la réalise. En particulier, dans le domaine qui nous intéresse, la théorie débouche sur le principe de fonctionnement des coupleurs d'antennes (aussi appelés boîtes d'accord ou boîtes de couplage). Nous n'étudierons donc pas de schémas pratiques de coupleurs; on en trouve à profusion dans les revues et handbooks, ainsi que sur internet.

Cette première partie sera surtout consacrée au rappel des notions importantes d'impédance et d'admittance.

2. Situering van het probleem

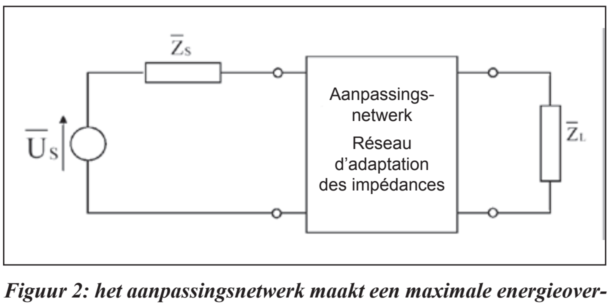
Beschouwen we een generator die een sinusoïdale spanning $\overline{U}_S$ produceert. De amplitude is U_S en de interne impedantie is $\overline{Z}_S$. De generator is aangesloten op een belasting met impedantie $\overline{Z}_L$ (**figuur 1**). Het zou kunnen gaan over een zender die via een voedingslijn aangesloten is op een antenne. $\overline{Z}_L$ is dan de impedantie aan de ingang van de lijn, kant zender.
We willen zoveel mogelijk energie overbrengen van de generator naar de belasting. Dat zal enkel het geval zijn als de juiste relatie bestaat tussen $\overline{Z}_L$ en $\overline{Z}_S$. Men zegt dan dat de impedanties aangepast zijn.



Figuur 1: een generator met uitgangsimpedantie $\overline{Z}_S$, aangesloten op een belasting met impedantie $\overline{Z}_L$.

Figure 1: un générateur d'impédance de sortie $\overline{Z}_S$, branché sur une charge d'impédance $\overline{Z}_L$.

In het algemeen is aan die voorwaarde niet voldaan. In het geval van het voorbeeld van de zender en de antenne kan het zijn dat de uitgangsimpedantie van de zender een pure weerstand is van 50 Ω, terwijl de impedantie van de antenne (de impedantie gezien doorheen de lijn die de zender verbindt met de antenne) meestal complex is; dit wil zeggen dat ze zich toont als een weerstand in serie met een inductie of capaciteit. Men moet dan een passief netwerk (samengesteld uit enkel weerstanden, capaciteiten en inducties) tussen de generator en de belasting schakelen dat zorgt voor de aanpassing van de impedanties (**figuur 2**).



Figuur 2: het aanpassingsnetwerk maakt een maximale energieoverdracht mogelijk tussen de generator en de belasting.

Figure 2: le réseau d'adaptation des impédances permet d'obtenir un transfert maximum de puissance du générateur vers la charge.

Omdat weerstanden door het Joule-effect te veel verliezen veroorzaken zal in de praktijk het netwerk enkel bestaan uit spoelen en capaciteiten.

2. Position du problème

Considérons un générateur de tension sinusoïdale $\overline{U}_S$, d'amplitude U_S et dont l'impédance interne vaut $\overline{Z}_S$. Ce générateur est branché sur une charge d'impédance $\overline{Z}_L$ (**figure 1**). Pour être plus concret, il pourrait s'agir d'un émetteur raccordé à une antenne via une ligne, $\overline{Z}_L$ étant l'impédance à l'entrée de la ligne.

Nous désirons transférer un maximum de puissance du générateur à la charge; cela ne peut être obtenu que s'il existe une relation bien déterminée entre $\overline{Z}_L$ et $\overline{Z}_S$. On dit alors que les impédances sont adaptées.

En général, cette condition n'est pas satisfaite. Dans le cas de l'exemple émetteur-antenne, l'impédance de sortie de l'émetteur peut être purement résistive et égale à 50 Ω, tandis que l'impédance de l'antenne (en fait, l'impédance vue à travers la ligne reliant l'émetteur à l'antenne) est en général complexe; c'est-à-dire qu'elle peut être considérée comme étant équivalente à une résistance en série avec une inductance ou une capacité. On doit alors insérer entre le générateur et la charge, un réseau passif (donc composé uniquement de résistances, inductances et capacités) qui réalisera l'adaptation des impédances (**figure 2**).

Pratiquement, ce réseau ne comprendra que des inductances et des capacités, les résistances étant exclues puisqu'elles produiraient des pertes de puissance par effet Joule.

3. Impedanties en admittanties

Omdat we deze begrippen voortdurend zullen gebruiken is een kleine, doch beperkte opfrissing aangewezen.
We gaan ervan uit dat de basisbegrippen weerstand, reactantie alsook complexe getallen gekend zijn.

3.1 Impedanties

3.1.1 Definitie

De impedantie $\overline{Z}$ van een schakeling is de verhouding van de spanning aan de klemmen van die schakeling tot de stroom in de schakeling, of

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$

De streepjes boven de symbolen U et I duiden aan dat we te maken hebben met complexe uitdrukkingen, die niet enkel de amplitude maar ook de fase voordtellen van de sinusoïdale functies u(t) et i(t).

In het algemeen is de impedantie $\overline{Z}$ een complex getal dat beschouwd moet worden als de combinatie (in serie) van een weerstand R en een reactantie X. We noteren de impedantie als $\overline{Z} = R + jX$; het streepje duidt opnieuw op een complex getal. Men mag de impedantie $\overline{Z}$ niet verwarren met zijn modulus Z (zie verder). De reactantie X kan positief (inductief) of negatief (capacitief) zijn. Het symbool j staat voor het imaginaire getal $j = \sqrt{-1}$; concreet duidt het aan dat, als door de impedantie een stroom I loopt, de spanning jXI aan de klemmen van de impedantie een faseverschil van 90° vertoont (voorijlend of naijlend, volgens het teken van X) ten opzichte van de spanning RI over de weerstand R.

Bijzondere gevallen:
- als X = 0 is $\overline{Z} = R$ (een zuivere weerstand);
- als R= 0 is $\overline{Z} = jX$ (een zuivere reactantie), met $X = \omega L = 2\pi fL$ voor een inductantie L en $X = -1/\omega C = -1/(2\pi f C)$ voor een capaciteit C.

3.1.2 Grafische voorstelling van een impedantie

Een impedantie kan grafisch voorgesteld worden in een vlak met assenkruis X-R (cartesiaanse voorstelling); de horizontale as R stelt de zuivere weerstanden voor en de verticale as X de zuivere reactanties (**figuur 3**).

In het vlak X-R wordt een impedantie voorgesteld door een punt met coördinaten (R,X). Alle impedanties liggen rechts van de X-as (weerstanden zijn positief). Een punt $\overline{Z}_1$, met coördinaten (X_1, R_1), boven de R-as komt overeen met een positieve (inductieve) reactantie; een punt $\overline{Z}_2$, met coördinaten (X_2, R_2), onder de R-as komt overeen met een negatieve (capacitieve) reactantie.

De afstand van de oorsprong van het assenkruis tot het punt dat de impedantie voorstelt noemt men de modulus van $\overline{Z}$:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

De verhouding $\frac{X}{R}$ definieert het argument van de impedantie:

$$\Phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{X}{R}\right)$$

Men kan dus de impedantie op twee verschillende manieren schrijven:
- de cartesiaanse vorm op basis van de weerstand R en de reactantie X: $\overline{Z} = R + jX$.
- de polaire vorm op basis van de modulus Z en het argument φ:

$$\overline{Z} = Z\angle\varphi$$

De impedantie doet zich niet altijd voor als de serieschakeling van een echte weerstand met een echte capaciteit of spoel. Zo laat bijvoorbeeld een antenne aan het voedingspunt een impedantie zien die voorgesteld kan worden door middel van een weerstand R (verliesweerstand + stralingsweerstand) in serie met een spoel of capaciteit, waarvan de waarde meestal verandert met de frequentie.

3. Impedances et admittances

Puisque nous allons utiliser en long et en large ces notions d'impédance et d'admittance, un petit rappel s'impose, sans toutefois refaire tout un cours sur la question. Nous supposons évidemment ici que les notions élémentaires de résistance et de réactance sont bien connues. Nous supposerons aussi que le lecteur possède une connaissance élémentaire des nombres complexes.

3.1 Impedances

3.1.1 Définition

L'impédance $\overline{Z}$ d'un circuit est le rapport de la tension aux bornes de ce circuit au courant circulant dans le circuit, soit

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}}{\overline{I}}$$

Les barres sur les symboles U et I indiquent que l'on a affaire ici aux substituts complexes (ou phaseurs) des grandeurs sinusoïdales u(t) et i(t).

L'impédance $\overline{Z}$ est donc en général un nombre complexe et peut être considérée comme l'association (en série) d'une résistance R et d'une réactance X. L'impédance est notée $\overline{Z} = R + jX$; la barre au dessus du Z indiquant que l'on a affaire à une expression complexe. Il ne faut donc pas confondre l'impédance $\overline{Z}$ avec son module Z (voir plus loin). La réactance X peut être positive (inductive) ou négative (capacitive). Le symbole j désignant le nombre imaginaire pur $j = \sqrt{-1}$; plus concrètement, il exprime le fait que si l'impédance est traversée par un courant sinusoïdal I, la tension jXI aux bornes de la réactance est déphasée de 90° (en avance ou en retard suivant le signe de X) par rapport à la tension aux bornes de la résistance RI.

Cas particuliers:
- X = 0, $\overline{Z} = R$ (résistance pure);
- R= 0, $\overline{Z} = jX$ (réactance pure), avec $X = \omega L = 2\pi fL$ pour une inductance L et $X = -1/\omega C = -1/(2\pi f C)$ pour une capacité C.

3.1.2 Représentation graphique d'une impédance

Une impédance peut être représentée graphiquement dans un plan cartésien X – R (représentation cartésienne); l'axe horizontal R correspondant à des résistances pures et l'axe vertical X à des réactances pures (**figure 3**).

Dans ce plan X – R, une impédance est représentée par un point de coordonnées (R,X). Tous les points représentatifs d'impédances sont situés à droite de l'axe des X (les résistances sont positives). Un point tel que $\overline{Z}_1$, de coordonnées (X_1, R_1), situé au-dessus de l'axe des R, correspond à une réactance positive (inductance); un point tel que $\overline{Z}_2$, de coordonnées (X_2, R_2), situé en dessous de l'axe des R, correspond à une réactance négative (capacité).

La distance de l'origine des axes au point représentatif de l'impédance est égale au module Z de l'impédance:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

Le rapport $\frac{X}{R}$ définit l'argument de l'impédance: $\Phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{X}{R}\right)$

On a donc en fait deux façons d'écrire une impédance:
- la forme cartésienne qui fait intervenir la résistance R et la réactance X: $\overline{Z} = R + jX$.
- la forme polaire qui fait intervenir le module Z et l'argument φ:

$$\overline{Z} = Z\angle\varphi$$

La résistance et la réactance n'apparaissent pas toujours comme une résistance réelle mise en série avec une capacité ou une inductance réelle. Une antenne par exemple, présente à son point d'alimentation une certaine impédance et peut être représentée par une résistance R (résistance due pertes + résistance de rayonnement) en série avec une inductance ou une capacité dont les valeurs varient généralement avec la fréquence.

Voorbeeld 1

Een weerstand van 100 Ω staat in serie met een spoel van 5 µH. Bereken de overeenkomstige impedantie op een frequentie van 3,7 MHz. Hoe groot is de amplitude van de stroom en de fase van de stroom ten opzichte van de spanning, indien de schakeling gevoed wordt met een sinusvormige spanning met een amplitude van 100 V en een frequentie van 3,7 MHz?

Oplossing

Op 3,7 MHz is de reactantie van de spoel $X_L = 2\pi fL = 116{,}24\ \Omega$. De impedantie van de schakeling is dan $\overline{Z} = (100 + j\,116{,}24)\ \Omega$. Of een modulus van $Z = 153{,}34\ \Omega$ met een argument $\varphi = 49{,}30°$. Wordt ook genoteerd als $\overline{Z} = 153{,}34\angle 49{,}30°\ \Omega$.

Voor een spanning met een amplitude van 100 V, bedraagt de stroom:

$\overline{I} = \dfrac{100}{153{,}34\angle 49{,}30°} = 0{,}652\angle -49{,}30°$ *A. Dat wil zeggen dat de stroom in de schakeling gelijk is aan 0,652 A en 49,30° naijlt op de spanning.*

Voorbeeld 2

Zelfde vraag voor een weerstand van 100 Ω in serie met een condensator van 300 pF. De frequentie blijft ongewijzigd.

Oplossing

Op 3,7 MHz bedraagt de reactantie van de capaciteit $X_C = \dfrac{-1}{2\pi fC}$ - 143,38 Ω. De impedantie is dan $\overline{Z} = (100 - j\,143{,}38)\ \Omega$ of $\overline{Z} = 174{,}81\angle -55{,}11°\ \Omega$.

Een spanning met een amplitude van 100 V veroorzaakt een stroom van $\overline{I} = \dfrac{100}{174{,}81\angle -55{,}11°} = 0{,}572\angle 55{,}11°$ A, of een stroom met een amplitude van 0,572 A die 55,11° voorijlt.

3.1.3 Impedanties in serie

Twee impedanties $\overline{Z}_1$ en $\overline{Z}_2$ in serie vormen een impedantie $\overline{Z} = R + jX$ met $R = R_1 + R_2$ et $X = X_1 + X_2$:

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = (R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2) = R + jX$$

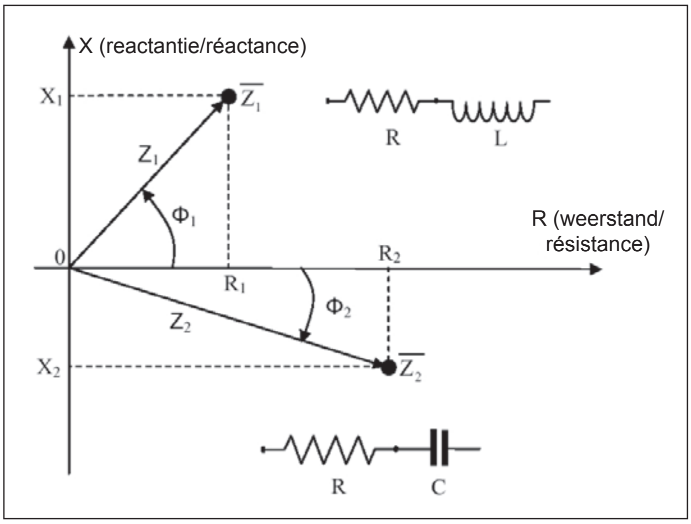
In het bijzonder geldt:

- als $X_2 = 0$ (een zuivere weerstand in serie met $\overline{Z}_1$) dat $\overline{Z} = (R_1 + R_2) + jX_1 = R + jX$; (1)
- als $R_2 = 0$ (een zuivere reactantie in serie met $\overline{Z}_1$) dat $\overline{Z} = R_1 + j(X_1 + X_2) = R + jX$. (2)

Vergelijking (1) toont dat een weerstand in serie plaatsen met een impedantie, enkel de resistieve waarde van de impedantie wijzigt. Plaatst men een zuivere reactantie in serie met de impedantie (vergelijking (2)), dan verandert alleen de waarde van het reactieve deel van de impedantie. **Van deze tweede eigenschap maakt men gebruik in de antennekoppelaar.** We komen er later op terug.

In **figuur 4** is te zien hoe het in serie plaatsen van een weerstand of reactantie de impedantie wijzigt.

- Door een weerstand R_S in serie te schakelen met $\overline{Z}$, bekomt men een impedantie $\overline{Z}_1 = R_1 + jX$ waarvan het reactieve deel niet verandert en waarvan het resistieve deel $R_1 = R + R_S$.
- Plaatst men een spoel L_S in serie met $\overline{Z}$, dan wordt de impedantie $\overline{Z}_1 = R + jX'_1$. Het resistieve deel blijft ongewijzigd maar het reactieve deel $X'_1 = X + 2\pi fL_S$ (f is de frequentie).
- Een capaciteit C_S in serie geeft $\overline{Z}''_1 = R + jX''_1$ met een ongewijzigde resistiviteit en een reactief deel $X''_1 = X - 1/2\pi fC_S$.



Figuur 3: een impedantie wordt voorgesteld door een punt in het complexe vlak X-R. / *Figure 3: une impédance peut être représentée par un point dans le plan complexe X – R.*

Exemple 1

Une résistance de 100 Ω est connectée en série avec une inductance de 5 µH. Calculer l'impédance correspondante à la fréquence de 3,7 MHz. Si une tension sinusoïdale de 100 V d'amplitude et de fréquence égale à 3,7 MHz est appliquée aux bornes de ce circuit, que vaudront l'amplitude du courant et sont déphasage par rapport à la tension?

Solution

A 3,7 MHz, la réactance de l'inductance vaut XL = 2πfL = 116,24 Ω. L'impédance du circuit vaut alors $\overline{Z} = (100 + j\,116{,}24)\ \Omega$. Soit un module Z = 153,34 Ω et un argument $\varphi = 49{,}30°$. On peut donc aussi écrire $\overline{Z} = 153{,}34\angle 49{,}30°\ \Omega$.

Pour une tension d'amplitude 100 V, le courant vaudra:

$\overline{I} = \dfrac{100}{153{,}34\angle 49{,}30°} = 0{,}652\angle -49{,}30°$ *A. Cela signifie que le courant dans le circuit a une amplitude de 0,652 A et est déphasé de 49,30° en retard sur la tension.*

Exemple 2

Même question pour une résistance de 100 Ω en série avec un condensateur de 300 pF, la fréquence étant inchangée.

Solution

A 3,7 MHz, la réactance de la capacité vaut $X_C = \dfrac{-1}{2\pi fC}$ - 143,38 Ω. L'impédance du circuit vaut alors $\overline{Z} = (100 - j\,143{,}38)\ \Omega$ ou $\overline{Z} = 174{,}81\angle -55{,}11°\ \Omega$.

Pour une tension d'amplitude 100 V, le courant vaudra: $\overline{I} = \dfrac{100}{174{,}81\angle -55{,}11°} = 0{,}572\angle 55{,}11°$ A, soit une amplitude de 0,572 A et un déphasage en avance de 55,11°.

3.1.3 Impédances en série

La mise en série de deux impédances $\overline{Z}_1$ et $\overline{Z}_2$ donne une impédance $\overline{Z} = R + jX$ avec $R = R_1 + R_2$ et $X = X_1 + X_2$:

$$\overline{Z} = \overline{Z}_1 + \overline{Z}_2 = (R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2) = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2) = R + jX$$

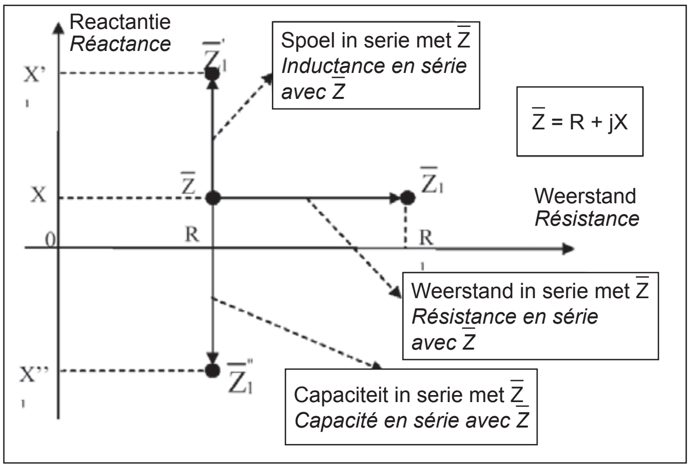
En particulier:

- si $X_2 = 0$ (résistance pure en série avec $\overline{Z}_1$), $\overline{Z} = (R_1 + R_2) + jX_1 = R + jX$; (1)
- si $R_2 = 0$ (réactance pure en série avec $\overline{Z}_1$), $\overline{Z} = R_1 + j(X_1 + X_2) = R + jX$. (2)

L'équation (1) montre que le fait de mettre une résistance en série avec une impédance ne modifie que la partie résistive de cette impédance; par contre (équation (2)), si l'on met une réactance pure en série avec cette impédance, on ne modifie que la partie réactive de l'impédance. **Ce deuxième cas est d'application dans les coupleurs d'antennes**, nous en reparlerons plus loin.

La **figure 4** montre la transformation d'une impédance lorsque l'on met en série avec cette impédance, une résistance ou une réactance.

- En plaçant une résistance R_S en série avec $\overline{Z}$, on obtient une impédance $\overline{Z}_1 = R_1 + jX$ dont la partie réactive n'a pas changé et dont la partie résistive vaut $R_1 = R + R_S$.
- En plaçant une inductance L_S en série avec $\overline{Z}$, on obtient une impédance $\overline{Z}_1 = R + jX'_1$ dont la partie résistive n'a pas changé et dont la partie réactive vaut $X'_1 = X + 2\pi fL_S$ (f étant la fréquence).
- En plaçant une capacité C_S en série avec $\overline{Z}$, on obtient une impédance $\overline{Z}''_1 = R + jX''_1$ dont la partie résistive n'a pas changé et dont la partie réactive vaut $X''_1 = X - 1/2\pi fC_S$.



Figuur 4: verandering van een impedantie door het in serie plaatsen van een weerstand of reactantie (spoel of capaciteit). */ Figure 4: transformation d'une impédance quelconque par mise en série avec cette impédance, d'une résistance ou d'une réactance (inductance ou capacité).*

We merken dat voor een weerstand in serie, het punt dat de impedantie voorstelt, zich verplaatst op een horizontale lijn. Voor een reactantie in serie verplaatst het punt zich op een verticale lijn.

Voorbeeld 3

We verbinden nu de schakelingen uit de voorbeelden 1 en 2 in serie. Wat is de totale impedantie (op 3,7 MHz). Op welke frequentie zal de impedantie een zuivere weerstand zijn?

Oplossing

$\bar{Z}$ = (100 + j 116,24) + (100 - j 143,38) = (200 – j27,14) Ω.

De frequentie waarbij de impedantie een pure weerstand is, is die waarbij de absolute waarden van de twee reactanties gelijk zijn: $\frac{1}{2\pi f C} = 2\pi f L$. *Hieruit bekomt man de formule van Thompson:* $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. *Met de opgegeven waarden van L en C resulteert dit in een frequentie f ≈ 4,109 MHz.*

3.1.4 Impedanties in parallel

De berekening van een impedantie $\bar{Z}$ van de **parallelschakeling** van twee impedanties $\bar{Z}_1$ en $\bar{Z}_2$ is wat ingewikkelder, maar gebeurt volgt dezelfde formule als die voor de parallelschakeling van twee weerstanden ($\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}$):

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 \times \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)\times(R_2 + jX_2)}{(R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2)} = \frac{(R_1 \times R_2 - X_1 \times X_2) + j(R_1 \times X_2 + R_2 \times X_1)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} \quad (3)$$

Door in (3) teller en noemer te vermenigvuldigen met de complex toegevoegde van de noemer, bekomt men:

$$\bar{Z} = \frac{(R_1 + R_2)\times R_1 \times R_2 + R_1 \times X_2^2 + R_2 \times X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{R_1^2 \times X_2 + R_2^2 \times X_1 + (X_1 + X_2)\times X_1 \times X_2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} = R + jX \quad (4)$$

Bijzondere gevallen:

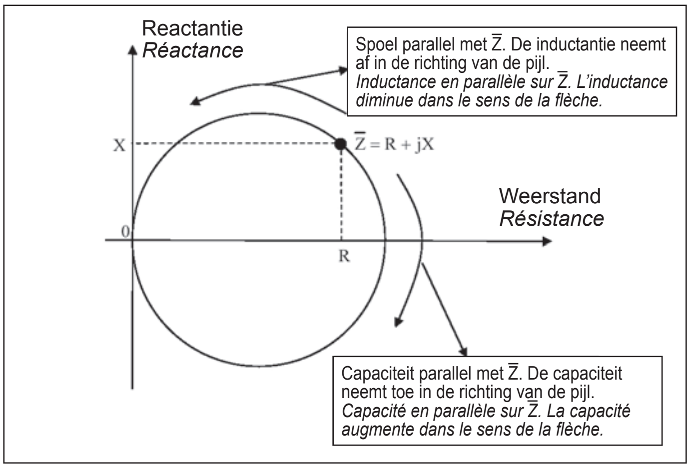
- als $X_2 = 0$ (zuivere weerstand parallel met $\bar{Z}_1$),

$$\bar{Z} = \frac{(R_1 + R_2)\times R_1 \times R_2 + R_2 \times X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} + j\frac{R_2^2 \times X_1}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} = R + jX\ ; \quad (5)$$

- als R2 = 0 (zuivere reactantie parallel met $\bar{Z}_1$),

$$\bar{Z} = \frac{R_1 \times X_2^2}{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{R_1^2 \times X_2 + (X_1 + X_2)\times X_1 \times X_2}{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2} = R + jX\ . \quad (6)$$

De vergelijking (5) bewijst dat een weerstand parallel met een impedantie zowel de resistieve als de reactieve waarde van de impedantie wijzigt. Hetzelfde is waar als men een reactantie parallel schakelt met een impedantie (vergelijking(6)).



Figuur 5: als men een spoel of capaciteit parallel schakelt met een impedantie, verplaatst het punt dat de impedantie voorstelt zich op een cirkel met middelpunt op de weerstandsas. */ Figure 5: lorsque l'on shunte une impédance par une inductance ou une capacité, le point représentatif de l'impédance se déplace sur un cercle centré sur l'axe des résistances.*

D'une façon générale, le point représentatif de l'impédance se déplace sur une droite parallèle à l'axe réel pour une résistance en série et parallèle à l'axe imaginaire pour une réactance en série.

Exemple 3

On connecte en série les deux circuits des exemples 1 et 2. Que vaudra (à 3,7 MHz) l'impédance résultante? A quelle fréquence l'impédance résultante sera-t elle purement résistive?

Solution

$\bar{Z}$ = (100 + j 116,24) + (100 - j 143,38) = (200 – j27,14) Ω.

Pour trouver à quelle fréquence on obtiendra une résistance pure, il faut chercher la fréquence à laquelle les deux réactances seront égales en valeur absolue: $\frac{1}{2\pi f C} = 2\pi f L$. *On retrouve alors la formule de Thompson:* $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. *En introduisant les valeurs de L et de C dans cette formule, on obtient f ≈ 4,109 MHz.*

3.1.4 Impédances en parallèle

Le calcul de l'impédance $\bar{Z}$ équivalente à la **mise en parallèle** de deux impédances $\bar{Z}_1$ et $\bar{Z}_2$ est un peu plus compliqué, mais suit le même principe que la mise en parallèle de deux résistances ($\frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2}$):

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 \times \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)\times(R_2 + jX_2)}{(R_1 + jX_1) + (R_2 + jX_2)} = \frac{(R_1 \times R_2 - X_1 \times X_2) + j(R_1 \times X_2 + R_2 \times X_1)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)} \quad (3)$$

En multipliant haut et bas dans (3) par le complexe conjugué du dénominateur, on obtient:

$$\bar{Z} = \frac{(R_1 + R_2)\times R_1 \times R_2 + R_1 \times X_2^2 + R_2 \times X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{R_1^2 \times X_2 + R_2^2 \times X_1 + (X_1 + X_2)\times X_1 \times X_2}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2} = R + jX \quad (4)$$

En particulier:

- si $X_2 = 0$ (résistance pure en parallèle sur $\bar{Z}_1$),

$$\bar{Z} = \frac{(R_1 + R_2)\times R_1 \times R_2 + R_2 \times X_1^2}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} + j\frac{R_2^2 \times X_1}{(R_1 + R_2)^2 + X_1^2} = R + jX\ ; \quad (5)$$

- si R2 = 0 (réactance pure en parallèle sur $\bar{Z}_1$),

$$\bar{Z} = \frac{R_1 \times X_2^2}{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2} + j\frac{R_1^2 \times X_2 + (X_1 + X_2)\times X_1 \times X_2}{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2} = R + jX\ . \quad (6)$$

La relation (5) montre que si l'on met une résistance en parallèle sur une impédance, on modifie à la fois la partie résistive et la partie réactive de cette impédance. De même (équation (6)), on peut modifier les parties résistive et réactive d'une impédance en la shuntant par une réactance. **Ce**

Dit tweede geval komt van pas bij het ontwerp van antennekoppelaars.

Het punt dat de impedantie voorstelt, verplaatst zich nu niet meer op een rechte lijn maar op een cirkel, waarvan het middelpunt op de weerstandsas ligt. Zie **figuur 5**, voor een impedantie parallel met een reactantie Xp (in het geval van een impedantie parallel met een weerstand verplaatst het punt dat de impedantie voorstelt zich eveneens op een cirkel met middelpunt op de weerstandsas).

Meer details over het wiskundige aspect van deze zaken (en nog veel andere informatie) is te vinden op de interessante site van G3YNH (http://www.g3ynh.info/zdocs/index.html; zie hoofdstuk 5: IMPEDANTIE-AANPASSING, DEEL 1) – wordt vervolgd

deuxième cas nous intéresse tout particulièrement pour la conception des coupleurs d'antennes.

Dans ce cas, le point représentatif de l'impédance ne se déplace plus sur une droite, mais sur un cercle centré sur l'axe des résistances, comme le montre la **figure 5**, pour une impédance shuntée par une réactance Xp (dans le cas d'une impédance shuntée par une résistance, le point représentatif de l'impédance se déplace aussi sur un cercle dont le centre se trouve sur l'axe des réactances).

On trouvera de plus amples détails sur cet aspect mathématique des choses (et bien d'autres informations) sur le très intéressant site de G3YNH (http://www.g3ynh.info/zdocs/index.html; voir au chapitre 5: IMPEDANCE MATCHING, PART 1) – à suivre